سری دهم تمرین‌های ریاضی ۲

۹ خرداد ۱۳۹۷

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال اول ۹۶-۹۵): مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ را که درون استوانه $x^2+y^2=y$ قرار دارد پیدا کنید.

سوال ۲ (نیم‌سال اول ۹۷-۹۶): برای رویه S به معادله $z^2-x^2-y^2=1$ که بین صفحات $z=1$ و $z=\sqrt{5}$ قرار دارد، مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\iint_S z dS.$$

سوال ۳ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): فرض کنید رویه M قسمتی از سهمی‌وار $z=1-x^2-y^2$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و قائم یکه آن رو به بیرون است. به‌علاوه فرض کنید $F(x,y,z)=(x-y,x+y^2,z^2)$. انتگرال $\iint_M \operatorname{curl}F\cdot dS$ را یک‌بار با محاسبه مستقیم و بار دیگر به کمک قضیه استوکس حساب کنید.

سوال ۴ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): میدان‌برداری $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $F(x,y,z)=(-yze^z,xze^z,xye^y)$ را درنظر بگیرید و فرض کنید S رویه $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y^2, z\leq 1\}$ باشد. اگر بردار n قائم یکه بر S و برون‌گرا باشد، حاصل انتگرال $\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n dS$ را محاسبه کنید.

سوال ۵ (نیم‌سال دوم ۹۴-۹۳): فرض کنید $\mathcal{C}_1$ نیم‌دایره $x^2+y^2=1$، $y\geq 0$، $z=0$ و $\mathcal{C}_2$ نیم‌دایره $x^2+z^2=1$، $z\geq 0$، $y=0$ باشد. $\mathcal{C}$ را خم بسته متشکل از $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ بگیرید. همچنین فرض کنید $F(x,y,z)=(y+2y^2,2x+4xy+6z^2,3x+e^y)$. با کمک قضیه استوکس انتگرال مسیر $\int_{\mathcal{C}} F\cdot dr$ را محاسبه کنید.

سوال ۶ (نیم‌سال دوم ۹۴-۹۳): مقدار انتگرال $\iint_S F\cdot dS$ را بیابید که در آن $F(x,y,z)=(1,1,z(x^2+y^2)^2)$ و S استوانه $x^2+y^2\leq 4$ محدود به $0\leq z\leq 1$ است که به جهت نرمال واحد، برون‌گرا شده است.

سوال ۷ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): میدان‌برداری $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $F(x,y,z)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید S رویه $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1\leq x,y\leq 1, z=1\}$ باشد. اگر بردار n که قائم یکه بر S در جهت مثبت محور z باشد، حاصل انتگرال $\iint_S F\cdot n dS$ را محاسبه کنید.

سوال ۸ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): فرض کنید رویه M به صورت زیر پارامتری شده است

$$r(u,v)=((a+b\cos u)\cos v,(a+b\cos u)\sin v,b\sin u)$$

که در آن $0\leq u\leq\pi$ و $0\leq v\leq 2\pi$ و a و b دو ثابت با شرط $0<b<a$ هستند. در واقع M نیمه بالایی رویه موسوم به چنبره است و قائم یکه آن رو به بیرون است. فرض کنید $F(x,y,z)=(e^{yz},e^{xz},e^{x^2+y^2})$. به کمک قضیه دیورژانس، انتگرال $\iint_M F\cdot dS$ را حساب کنید.

سوال ۹ (نیم‌سال اول ۹۶-۹۵): فرض کنید $g(u,v)$ تابعی هموار باشد و قرار دهید

$$G(x,y.z)=(zg_v(zy,x)+x,z^2g_u(zy,x)+x,g(zy,x)+zyg_u(zy,x))$$

الف) $\mathrm{curl}(G)$ را محاسبه کنید.

ب) اگر D ناحیه‌ای مسطح در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A و بردار نرمال N باشد، $\int_{\partial D} G \cdot dr$ را حساب کنید.

ج) انتگرال $\int_{\partial D} G \cdot dr$ را برای خم $\mathcal{C}$ با پرمایش زیر محاسبه کنید. (راهنمایی: G جمع یک میدان پایستار با یک میدان ساده است.)

$$\gamma(t) = (at, \cos t, \sin t)$$
$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

سوال ۱۰ (نیم‌سال دوم ۹۴-۹۳):

الف) برای میدان برداری F و تابع حقیقی f نشان دهید $\nabla \times (fF) = f(\nabla F) + (\nabla f) \times F$.

ب) فرض کنید رویه S قسمتی از کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ باشد که میان دو صفحه $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ قرار گرفته است. میدان برداری F به صورت $F=\nabla\theta\times\nabla\varphi$ داده شده است که θ و φ مولفه‌های دوم و سوم مختصات کروی هستند. اگر n بردار نرمال برون‌گرا روی سطح کره باشد، $\iint_S F\cdot ndS$ را بیابید.

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\iint_S zdS$ که در آن S سطح جانبی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ تا $z=1$ است.

تمرین ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\iint_S F\cdot NdS$ که در آن، میدان برداری F به صورت زیر است

$$F(x,y,z) = \big(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\big)$$

و S سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ است. (N برون‌گرا)

تمرین ۳: مطلوب است محاسبه $I=\iint_S F\cdot NdS$ که در آن $F(x,y,z)=(bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$ و S سطح جانبی، کف و سقف استوانه $x^2+y^2=a^2$ و $0\leq z\leq b$ است. (N برون‌گرا)